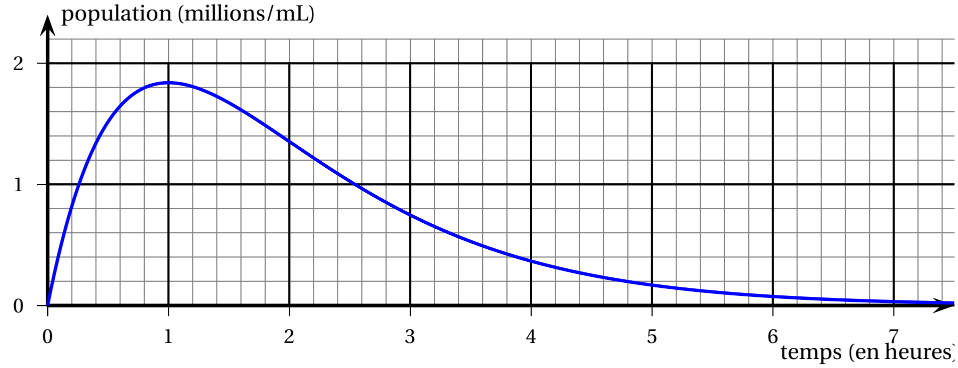
Exercice 3 — 6 points

Évolution d'une population bactérienne dans un milieu fermé

On étudie l'évolution d'une population de bactéries introduite dans un milieu nutritif fermé. On note t le temps (en heures) écoulé depuis l'introduction des bactéries.
On modélise la densité de population (en millions de bactéries par millilitre) par une fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$.

Partie A : Approche expérimentale et lectures graphiques

On dispose de la représentation graphique de la fonction f, obtenue à partir de mesures expérimentales.



À l'aide du graphique (et avec la précision permise par celui-ci), répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer le temps auquel la population semble maximale.
2. Déterminer les instants pour lesquels la population dépasse 1 million de bactéries par millilitre.
3. Décrire l'évolution de la courbure de la courbe sur l'intervalle $[0~;~8]$.

Partie B : Mise en place du modèle mathématique

On admet que la fonction f vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \quad y' + y = 5\mathrm{e}^{-t}$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$.

1. Résoudre l'équation homogène associée :
$$(E') : \quad y' + y = 0.$$
2. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme
$$u(t) = at\mathrm{e}^{-t}, \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$
Déterminer la valeur de a pour que u soit solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. On suppose qu'au moment initial, la population est nulle ($f(0) = 0$). Déterminer l'expression de f.

Partie C : Exploitation du modèle

On admet désormais que :

$$f(t) = 5t\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ et interpréter ce résultat dans le contexte.
2. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variation. En déduire la valeur du maximum et le temps auquel il est atteint.
3. Montrer que l'équation $f(t) = 1$ admet deux solutions t_1 et t_2. Donner une valeur approchée de ces solutions à 10^{-2} près.
4. Déterminer la durée pendant laquelle la population dépasse 1 million de bactéries par millilitre.

Partie D : Population moyenne

On s'intéresse à la population moyenne durant la première heure.
Cette valeur est donnée par :

$$P_m = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer la valeur exacte de P_m.
2. Donner une valeur approchée à 0,01 près.
3. Interpréter ce résultat dans le contexte.